



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# Wytrzymałość Materiałów

## Zginanie

Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach i ramach, analiza stanu naprężeń i odkształceń, warunek bezpieczeństwa

**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki**

**Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji**

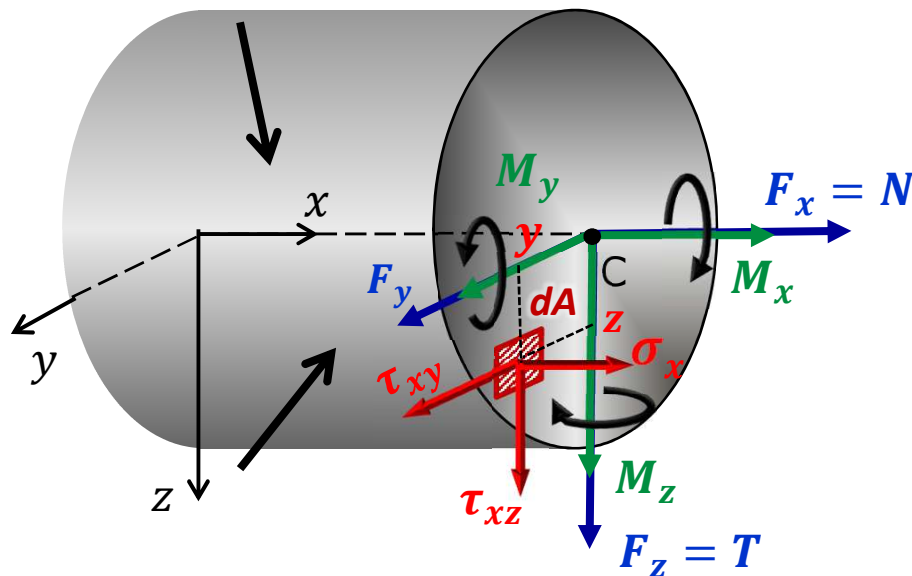
**dr hab. inż. Kinga Nalepka**

**B2, III p., pok. 312**

**e-mail: knalepka@agh.edu.pl**

**tel. 12 617 30 98**

# 1. Siły przekrojowe - naprężenia



$$N = \int_A \sigma_x dA \quad \text{- rozciąganie/ściskanie}$$

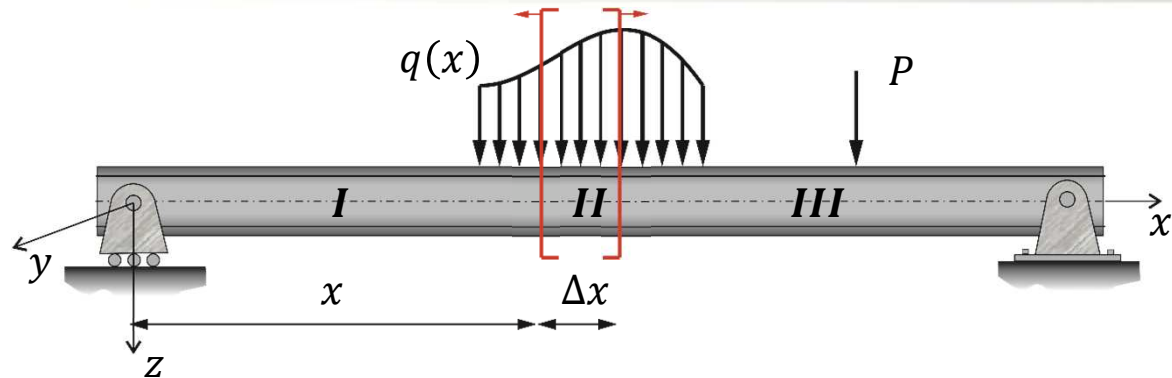
$$\left. \begin{aligned} F_y &= \int_A \tau_{xy} dA \\ F_z &= \int_A \tau_{xz} dA \end{aligned} \right\} \text{- ścinanie}$$

$$T = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad \text{- skręcanie}$$

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\ M_z &= - \int_A \sigma_x y dA \end{aligned} \right\} \text{- zginanie}$$

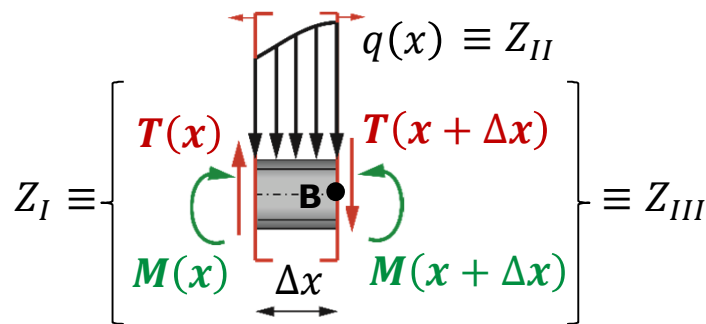
## 2. Siły przekrojowe w belce



Moment zginający:  $M_y = M$

Siła poprzeczna:  $F_z = T$

Pomijamy siłę podłużną  $F_x = N$ .  
Nie ma wpływu na prowadzoną analizę.

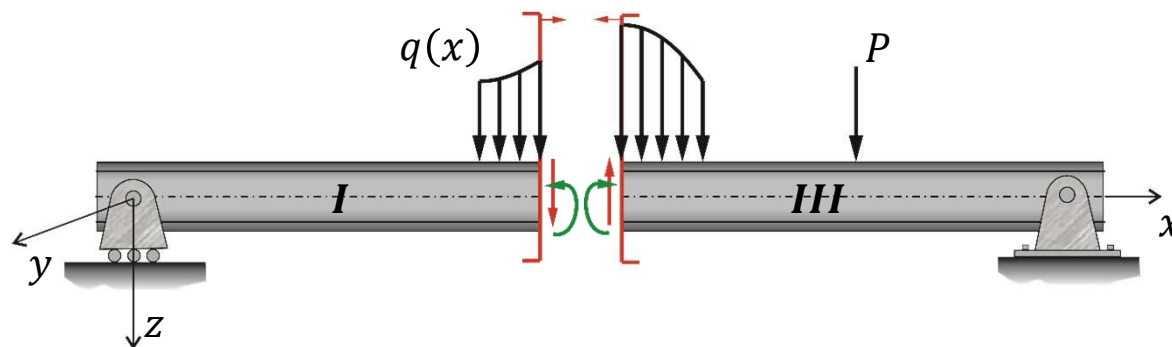


**Belka pozostaje w równowadze:**

$$Z_I + Z_{II} + Z_{III} \equiv 0$$

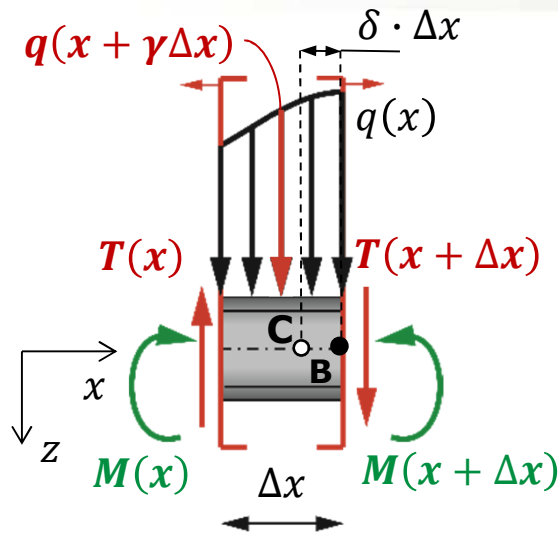
Wycięty element II również pozostaje w równowadze:

$$\sum Z = 0, \quad \sum M_B = 0$$



## 2. Siły przekrojowe w belce

### 2.1. Warunki równowagi



$q(x + \gamma\Delta x)$  - wartość średnia gęstości obciążenia  $q$  na odcinku  $\Delta x$ .

$\delta \cdot \Delta x$  - odległość środka ciężkości obciążenia  $q$  od punktu B

Warunki równowagi:

$$\sum Z = 0 \Leftrightarrow -T(x) + T(x + \Delta x) + q(x + \gamma\Delta x) \cdot \Delta x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow -T(x) \cdot \Delta x - M(x) + q(x + \gamma\Delta x) \cdot \Delta x \cdot \delta \cdot \Delta x + M(x + \Delta x) = 0$$

$$T(x + \Delta x) = T(x) + \frac{dT(x + \alpha \cdot \Delta x)}{dx} \Delta x$$

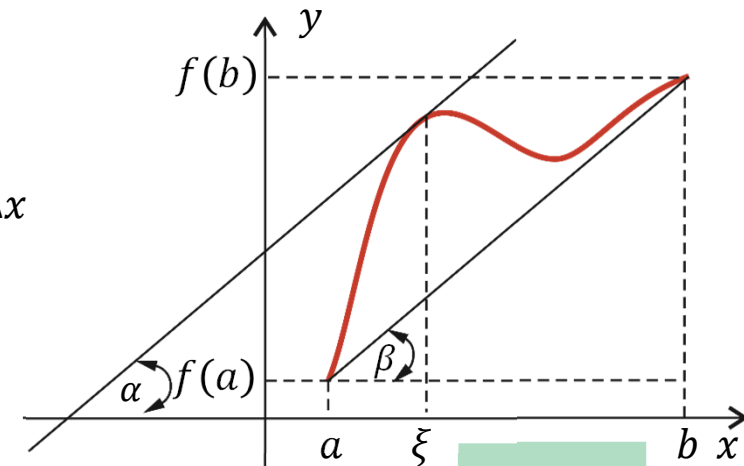
$$M(x + \Delta x) = M(x) + \frac{dM(x + \beta \cdot \Delta x)}{dx} \Delta x$$

### Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$  i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału to istnieje taki punkt  $\xi$ , że:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$f(b) = f(a) + f'(\xi) \cdot (b - a)$$



$$\alpha = \beta$$

## 2. Siły przekrojowe w belce

### 2.2. Zależności różniczkowe

Uwzględniając twierdzenie o wartości średniej:

$$\sum Z = 0 \Leftrightarrow -T(x) + T(x) + \frac{dT(x + \alpha \cdot \Delta x)}{dx} \Delta x + q(x + \gamma \Delta x) \cdot \Delta x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow -T(x) \cdot \Delta x - M(x) + q(x + \gamma \Delta x) \cdot \delta \cdot \Delta x^2 + M(x) + \frac{dM(x + \beta \cdot \Delta x)}{dx} \Delta x = 0$$

Przyjmując, że wycięty element jest nieskończenie mały  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 & \cancel{-T(x)} + \cancel{T(x)} + \frac{dT(x)}{dx} \Delta x + q(x) \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow \\
 & \cancel{-T(x) \cdot \Delta x} - \cancel{M(x)} + \underbrace{q(x) \cdot \delta \cdot \Delta x^2}_{\cong 0} + \cancel{M(x)} + \frac{dM(x)}{dx} \Delta x = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

**Tw. Schwedlera-Żurawskiego**

$$\begin{aligned}
 \frac{dT(x)}{dx} &= -q(x) \\
 \frac{dM(x)}{dx} &= T(x) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)
 \end{aligned}$$

#### Wnioski:

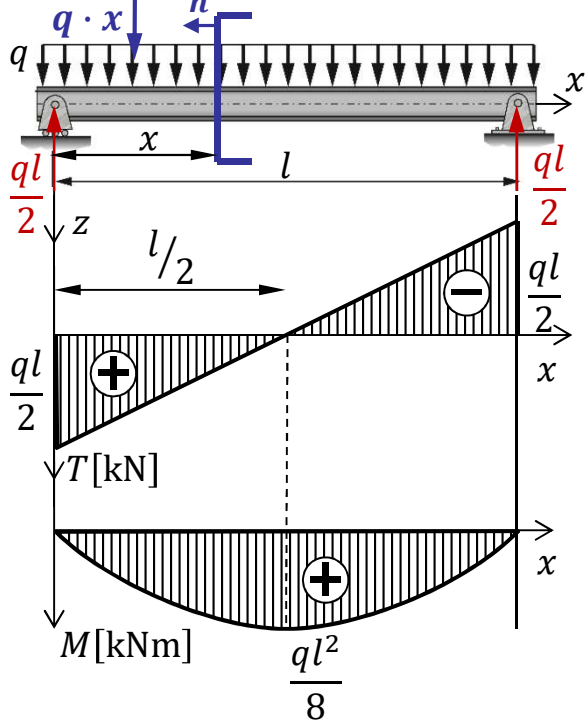
1. W przedziale, w którym nie przyłożono obciążenia ciągłego  $q(x) \equiv 0$ , siła poprzeczna  $T(x)$  jest funkcją stałą, a moment  $M(x)$  funkcją liniową.
2. W przedziale, w którym przyłożono obciążenie równomiernie rozłożone prostopadłe do osi belki  $q(x) \equiv const$ , siła poprzeczna  $T(x)$  jest funkcją liniową, a moment  $M(x)$  funkcją kwadratową.

**Miejsce zerowe siły poprzecznej określa ekstremum momentu.**

## 2.3. Belki proste: podstawowe przypadki obciążenia

### Belka wolno podparta, równomiernie obciążona.

Układ symetryczny



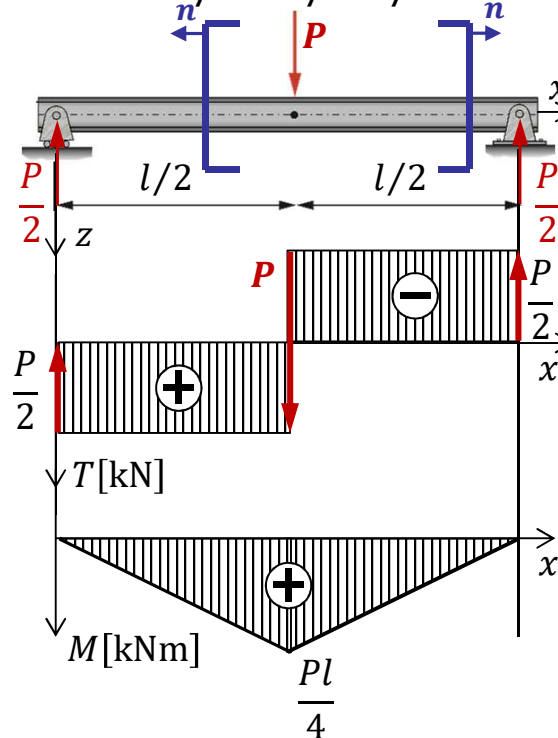
$$T(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$M(x) = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{1}{2}q \cdot x^2$$

$$M_{max} = M(l/2) = \frac{ql^2}{8}$$

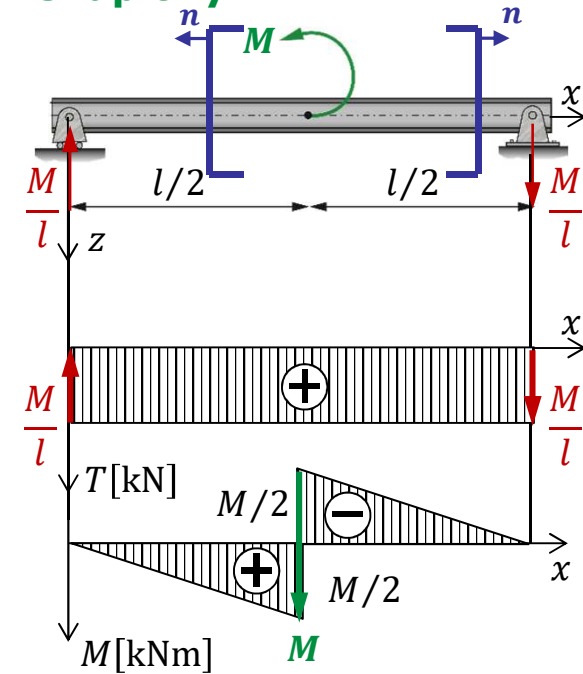
### Belka wolno podparta, obciążona siłą skupioną.

Układ symetryczny



W punkcie przyłożenia siły skupionej prostopadłej do osi belki następuje skok w wykresie siły poprzecznej o wartość przyłożonego obciążenia.

### Belka wolno podparta, obciążona momentem skupionym.



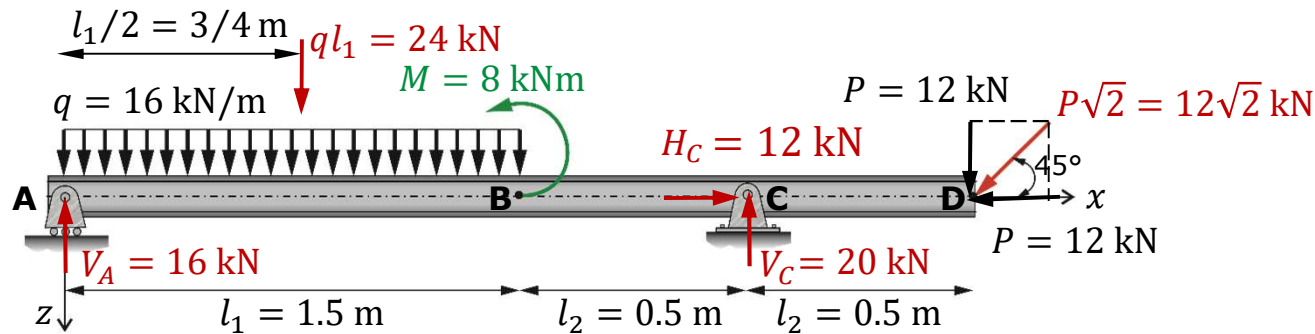
W punkcie przyłożenia momentu skupionego następuje skok w wykresie momentu o wartość przyłożonego obciążenia.

# 3. Wyznaczanie sił przekrojowych w belkach

## 3.1. Przykład

### Zadanie 1

Wyznacz funkcje i sporządź wykresy sił przekrojowych (siły podłużnej  $N$ , poprzecznej,  $T$  i momentu  $M$ ) dla belki przedstawionej poniżej.



Warunki równowagi:

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}ql_1^2 + M + V_C(l_1 + l_2) - P(l_1 + 2l_2) = 0 \Rightarrow V_C = \frac{\frac{1}{2}ql_1^2 - M + P(l_1 + 2l_2)}{(l_1 + l_2)} = 20 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Leftrightarrow -V_A + ql_1 - V_C + P = 0 \Rightarrow V_A = ql_1 - V_C + P \Rightarrow V_A = 16 \text{ kN}$$

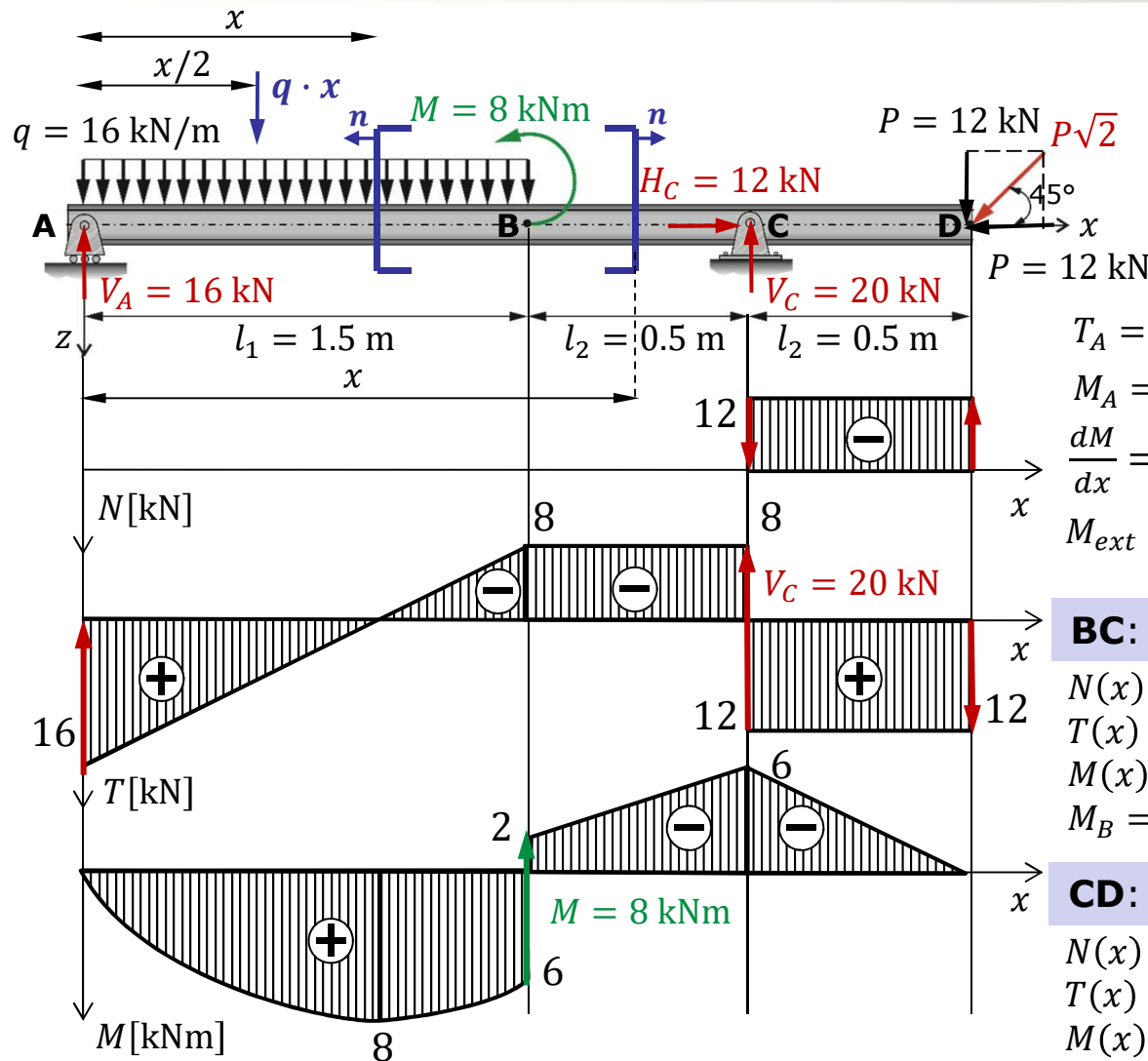
$$\sum X = 0 \Leftrightarrow H_C - P = 0 \Rightarrow H_C = P = 12 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -16 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{9}{4} + 8 + 20 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot 1 = 0$$

## 2. Wyznaczanie sił przekrojowych w belkach

### 2.1. Przykład



**AB:**  $x \in \langle 0, l_1 \rangle$

$$N(x) = 0$$

$$T(x) = V_A - qx$$

$$M(x) = V_A \cdot x - \frac{1}{2}q \cdot x^2$$

$$T_A = T(x=0) = 16 \text{ kN} \quad T_B = T(x=l_1) = -8 \text{ kN}$$

$$M_A = M(x=0) = 0 \quad M_B = M(x=l_1) = 6 \text{ kNm}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow T = V_A - qx_0 = 0 \quad x_0 = \frac{V_A}{q} = 1 \text{ m}$$

$$M_{ext} = M(x_0) = 8 \text{ kNm}$$

**BC:**  $x \in \langle l_1, l_1 + l_2 \rangle$

$$N(x) = 0$$

$$T(x) = P - V_C, \quad T_B = T_C = -8 \text{ kN}$$

$$M(x) = -P(l_1 + 2l_2 - x) + V_C(l_1 + l_2 - x)$$

$$M_B = -2 \text{ kNm}, \quad M_C = -6 \text{ kNm}$$

**CD:**  $x \in \langle l_1 + l_2, l_1 + 2l_2 \rangle$

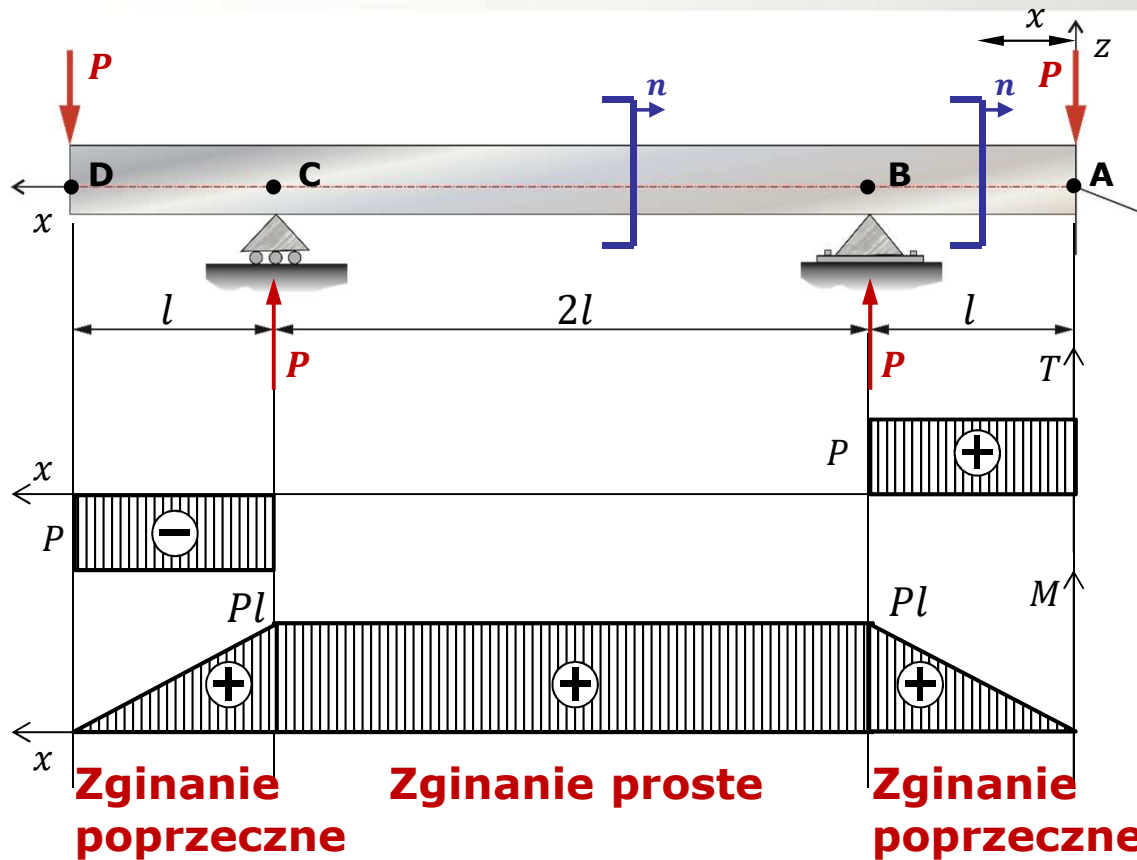
$$N(x) = -P = -12 \text{ kN}$$

$$T(x) = P, \quad T_C = T_D = 12 \text{ kN}$$

$$M(x) = -P(l_1 + 2l_2 - x), \quad M_C = -6 \text{ kNm}, \quad M_D = 0$$



# 4. Zginanie poprzeczne, a zginanie proste



$$z_0 = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{h}{3} \left( \frac{a + 2b}{a + b} \right)$$

## Zginanie poprzeczne

Obciążenie stanowią siły działające wzdłuż osi symetrii przekroju poprzecznego. Dodatkowo w płaszczyźnie tworzonej przez oś symetrii i oś pręta mogą być przyłożone momenty skupione.

## Zginanie proste

Obciążenie stanowią wyłącznie momenty.

**AB:**  $x \in \langle 0, l \rangle$

$$T(x) = P$$

$$M(x) = P \cdot x$$

$$M(0) = 0, M(l) = Pl$$

**BC:**  $x \in \langle l, 3l \rangle$

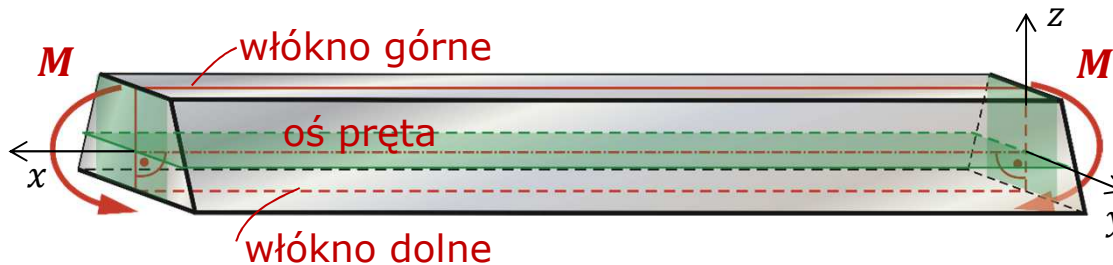
$$T(x) = 0$$

$$M(x) = P \cdot x - P \cdot (x - l) = Pl$$

## 5. Zginanie proste



**Konfiguracja początkowa**



**Konfiguracja końcowa**



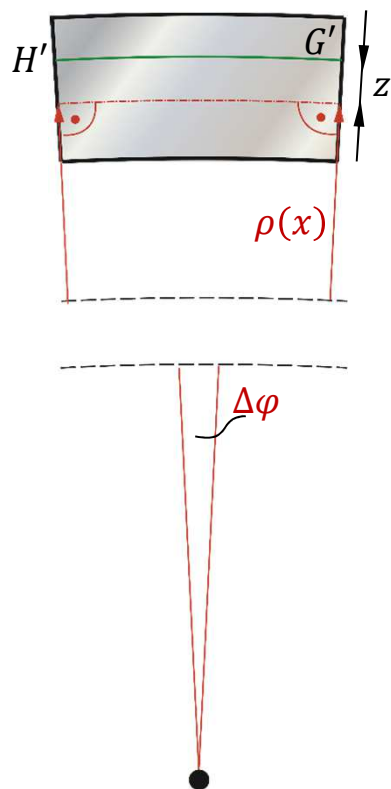
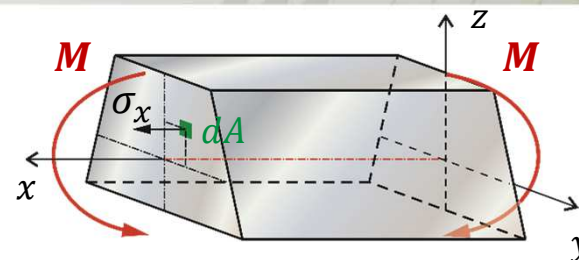
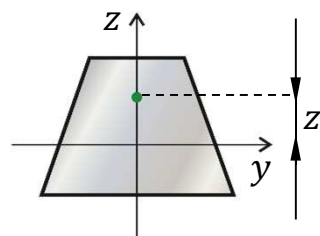
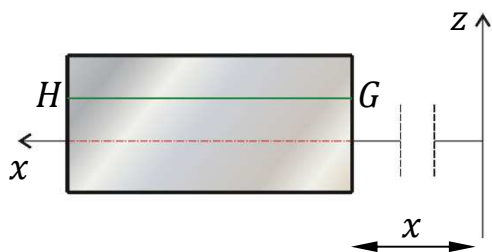
Prosty pręt pryzmatyczny o dowolnym przekroju poprzecznym i zadanych więzach (odbierających wszystkie stopnie swobody) obciążono na końcach momentami  $M$ , których wektory są równoległe do jednej z osi głównych centralnych przekroju poprzecznego.

- pręt jest nieważki,
- osie  $y, z$  stanowią osie główne centralne przekroju poprzecznego.

Przekroje poprzeczne pręta pozostają płaskie i prostopadłe do ugiętej osi pręta po przyłożeniu obciążenia

# 5. Zginanie proste

## 5.1 Odkształcenia i naprężenia



Odkształcenie liniowe:  $\varepsilon_x(x, y, z) = \lim_{G \rightarrow H} \frac{G'H' - GH}{GH}$

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi \cdot (\rho(x) + z) - \Delta\varphi \cdot \rho(x)}{\Delta\varphi \cdot \rho(x)}$$

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta\varphi} \cdot z}{\cancel{\Delta\varphi} \cdot \rho(x)} = \frac{z}{\rho(x)}$$

Prawo Hooke'a:  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{z}{\rho}$

Równoważność układu sił przekrojowych i naprężeń

$$N = 0 \Rightarrow \iint_A \sigma_x dA = 0 \text{ czyli } \iint_A E \cdot \frac{z}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \iint_A z dA = \frac{E}{\rho} S_y = 0 \quad \checkmark$$

$S_y$ : Moment statyczny względem osi głównej centralnej  $S_y = 0$

# 5. Zginanie proste

## 5.2. Stan odkształceń i naprężeń

Równoważność układu sił przekrojowych i naprężeń:

$$M_y = M \Rightarrow \iint_A \sigma_x \cdot z dA = M$$

Zgodnie z zależnością  $\sigma_x = E \cdot \frac{z}{\rho}$  otrzymujemy:

$$\iint_A E \cdot \frac{z^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \iint_A z^2 dA = \frac{E}{\rho} I_y = M$$

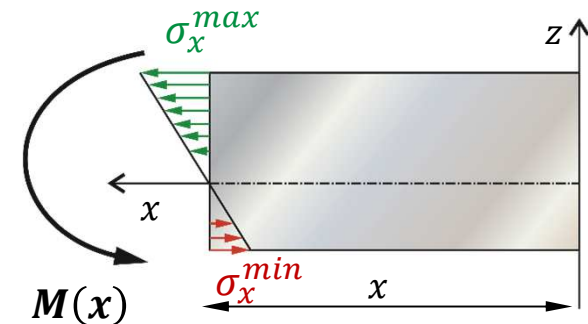
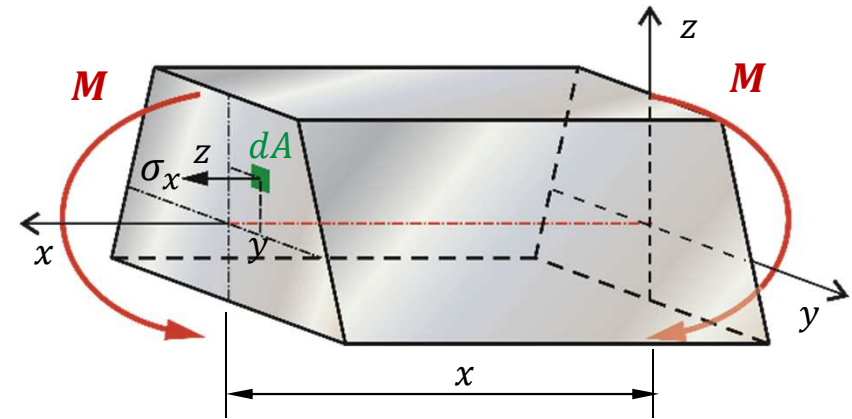
$I_y$  - główny centralny moment bezwładności.

Ostatecznie krzywizna warstwy obojętnej:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_y}$

Naprężenie normalne:  $\sigma_x(x, y, z) = \frac{M}{I_y} z$

Odształcenia liniowe:  $\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{M}{EI_y} z$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_z(x, y, z) = \frac{-\nu M}{EI_y} z$$



$$\sigma_x^{max} = \frac{M}{I_y} z_{max} \text{ rozciąganie}$$

$$\sigma_x^{min} = \frac{M}{I_y} z_{min} \text{ ściskanie}$$

# 5. Zginanie proste

## 5.3. Warunek bezpieczeństwa

### Materiały kruche

$$\sigma_x^{max} = \frac{M}{I_y} z_{max} \leq k_r \quad |\sigma_x^{min}| = \frac{M}{I_y} |z_{min}| \leq k_c$$

### Materiały sprężysto plastyczne

$$\frac{M}{I_y} \max|z| \leq k_r = k_c = k_g$$

$$\frac{M}{\frac{I_y}{\max|z|}} \leq k_g \Rightarrow \frac{M}{W_g} \leq k_g, \text{ gdzie } W_g = \frac{I_y}{\max|z|}$$

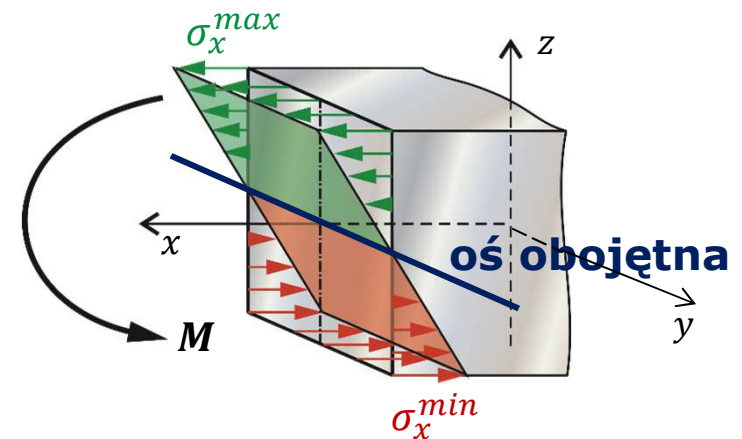
$W_g$  - Wskaźnik wytrzymałości przekroju przy zginaniu

$k_g$  - Dopuszczalne naprężenie przy zginaniu

### Oś obojętna

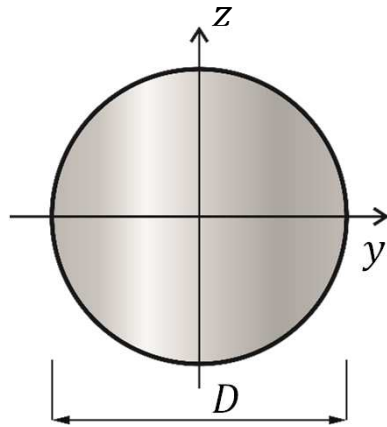
- Przy zginaniu prostym pokrywa się z wektorem momentu.
- Dzieli bryłę naprężeń na rozciągające i ściskające.
- W punktach najdalej od niej położonych występują największe (dodatnie lub ujemne) naprężenia.

Rozkład naprężeń w przekroju prostokątnym



## 5.4. Wskaźnik wytrzymałości przekroju przy zginaniu

### przekrój kołowy

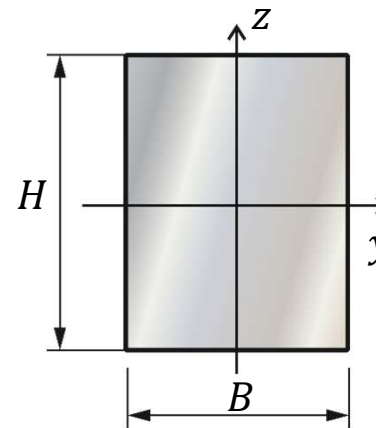


$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$W_g = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{I_y}{D/2}$$

$$W_g = \frac{\pi D^3}{32}$$

### przekrój prostokątny

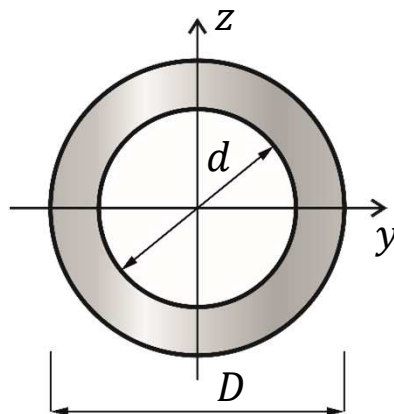


$$I_y = \frac{BH^3}{12}$$

$$W_g = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{I_y}{H/2}$$

$$W_g = \frac{BH^2}{6}$$

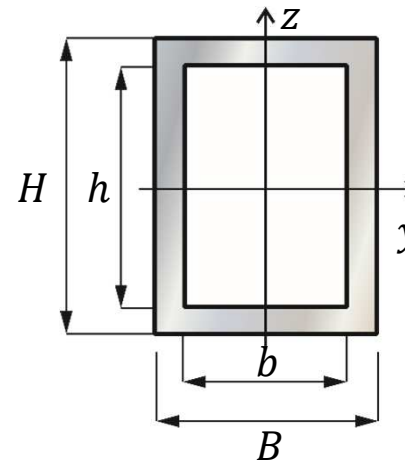
### przekrój pierścieniowy



$$I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

$$W_g = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$$



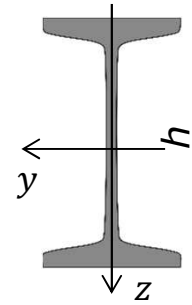
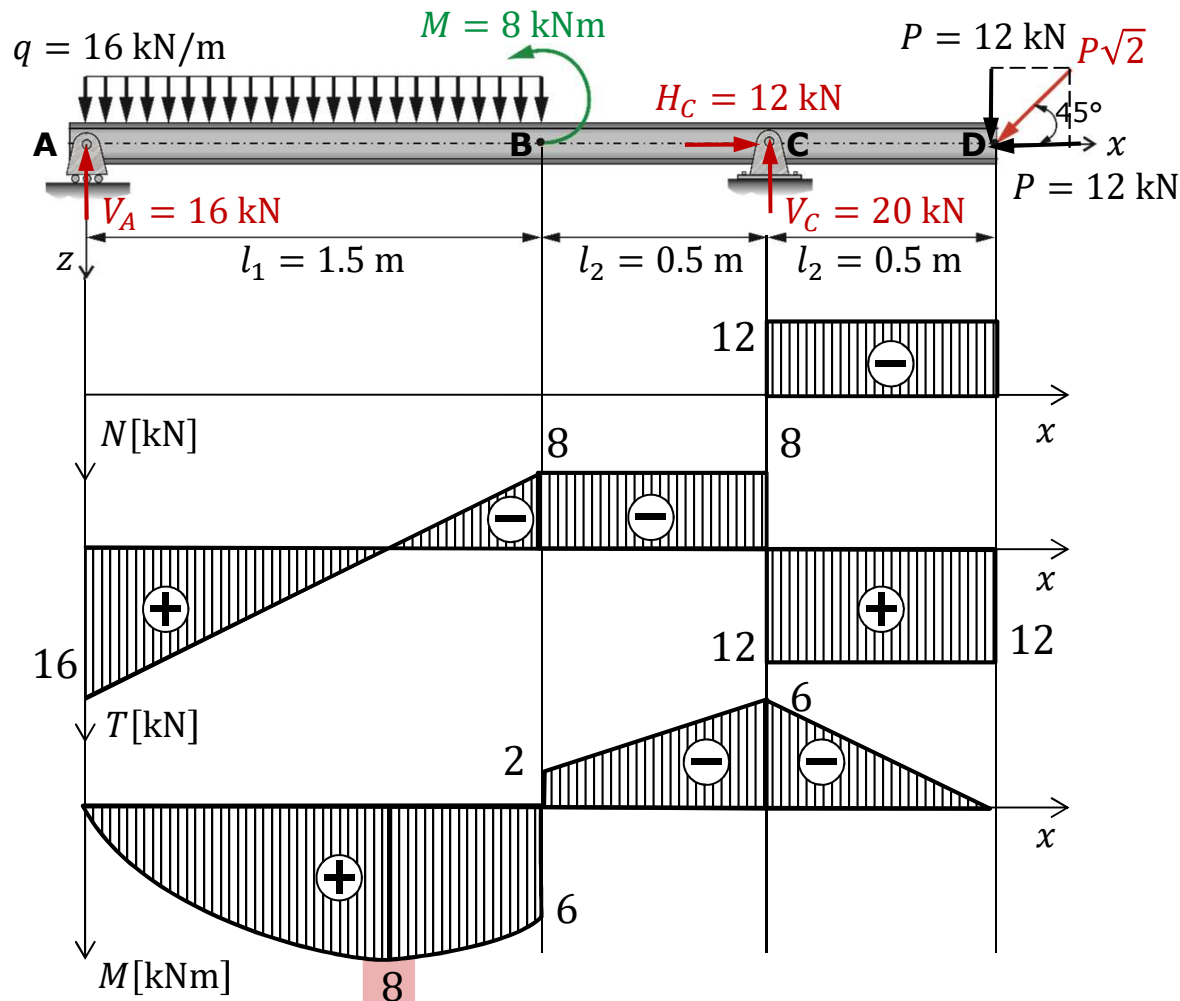
$$I_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$W_g = \frac{I_y}{H/2}$$

$$W_g = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$

**Wskaźniki wytrzymałości przekroju nie są addytywne**

## 5.5 Projektowanie elementów poddanych zginaniu: przykład



Dane:

$$k_g = 120 \text{ MPa}$$

$$M_{max} = 8 \text{ kNm}$$

### Warunek bezpieczeństwa

$$\frac{M}{W_g} \leq k_g \Rightarrow W_g \geq \frac{M}{k_g}$$

$$\Rightarrow W_g \geq \frac{8 \text{ kNm}}{120 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}$$

$$W_g \geq 66.7 \text{ cm}^3$$

Dwuteownik normalny

$$\text{I 140: } W_g = 81.9 \text{ cm}^3$$

W. Bogucki, M. Żybertowicz, *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*, Arkady, Warszawa 1996